

А. Ф. Муфтиев

**РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ
И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ**

краткое изложение

Учебно-методическое пособие

**Ижевск
2017**



**Ижевск
2017**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	2
Глава 1. Производящие функции и действия над ними	3
§1. Основные сведения	3
§2. Основные понятия и теоремы теории производящих функций	4
§3. Стандартные производящие функции	11
§4. Формальное дифференцирование	13
§5. Формальное интегрирование	14
Глава 2. Рекуррентные соотношения	16
§1. Основные сведения	16
§2. Последовательность Фибоначчи	18
Глава 3. Решение задач	20
§1. Комбинаторика	20
§2. Рекуррентные соотношения	21

Введение

Рекуррентные соотношения и производящие функции достаточно длительное время широко используются во многих областях математики, криптографии, экономики, теории определений и многих других. В особенности, производящие функции находят себе применение в теории случайных процессов, теории вероятностей, комбинаторном анализе, теории оптимизации, обработки изображений и многих других областях. Производящие функции – достаточно мощный инструмент для решения прикладных задач и, зачастую, именно метод производящих функций является единственным продуктивным методом для решения конкретной задачи.

Главное достоинство производящей функции заключается в том, что с одной ее помощью можно представить всю бесконечную последовательность. Часто при решении различных задач можно сначала обратиться к производящей функции, а затем, получив необходимую информацию, вновь вернуться к рассматриваемой последовательности.

Можно отметить, что, теория производящих функций и рекуррентных соотношений активно преподается на различных математических специальностях в рамках того или иного курса, а также в школе анализа данных, организованной компанией Яндекс.

Глава 1. Производящие функции и действия над ними

§1. Основные сведения

Определение 1.1.1. Если каждому натуральному n поставлено в соответствие действительное число, то функция f , осуществляющая такое соответствие, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, называется числовой последовательностью или просто последовательностью. При этом $f(n) \doteq a_n$ называется n -ым членом последовательности. Обозначения: $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$, или $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, или, коротко, $\{a_n\}$.

Способы задания последовательности.

1. Последовательность задана аналитически, если задана формула ее n -го члена: $a_n = f(n)$. Например, $a_n = n^2$. Таким способом можно задать последовательность 0, 1, 4, 9, 16,
2. Говорят, что числовая последовательность задана описательным способом, если объясняется, из каких элементов строится последовательность. Например, "последовательность состоит из всех простых чисел в порядке возрастания". Т.е. задана последовательность 2, 3, 5, 7, 11, В этом случае сложно ответить на вопрос о том, чему равен, к примеру, 500-й элемент последовательности.
3. Рекуррентный способ задания последовательности заключается в том, что, начиная с некоторого номера n , любой член последовательности можно выразить через предыдущий (один или несколько). Например, последовательность квадратов натуральных чисел также можно задать с помощью следующего рекуррентного

соотношения:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 1, \quad n > 0. \end{cases}$$

Определение 1.1.2. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две числовые последовательности и для них определены следующие арифметические операции. Суммой (разностью) двух числовых последовательностей называется последовательность $\{a_n \pm b_n\}$. Произведением двух числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ является последовательность $\{a_n b_n\}$, а, при $b_n \neq 0$, последовательность $\{a_n / b_n\}$ называется частным указанных последовательностей.

Определение 1.1.3. Пусть заданы последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. В этом случае говорят, что $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ является последовательностью частичных сумм.

Определение 1.1.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется периодической, если найдется такое натуральное T , что, начиная с некоторого номера n , выполняется равенство $a_{n+T} = a_n$. Величина T суть длина периода.

§2. Основные понятия и теоремы теории производящих функций

Нас будет интересовать бесконечная последовательность $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$, которую мы также записываем как $\{a_n\}$. Ее удобно выразить в виде степенного ряда относительно некоторой формальной переменной. Такой ряд, в общем случае, будем называть производящей функцией последовательности $\{a_n\}$.

Определение 1.2.1. Пусть $\{a_n\}$ – произвольная, в общем виде бесконечная, числовая последовательность. Производящей функцией для этой последовательности будем называть выражение вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

Если последовательность $\{a_n\}$ конечна, т.е. обрывается, например, на k -м члене, то производящая функция в этом случае будет называться производящим многочленом степени k .

Производящую функцию, как и обычную функцию, часто обозначают одной буквой, в скобках указывая ее аргумент:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Применяя метод производящих функций, ищется коэффициент a_n , который является ключом к решению исходной задачи. В связи с этим, удобно использовать следующее обозначение $[z^n]g(z) = a_n$. Другими словами, данная запись означает коэффициент при z^n в разложении $g(z)$.

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином «производящая функция» можно также пользоваться термином «формальный степенной ряд».

Ряд будем считать формальным в силу того, что z – лишь символ, означающий любой объект, допускающий применение операций алгебры формальных степенных рядов.

Замечание 1.2.1. Понятно, что мы не можем найти значение производящей функции $g(z)$ в точке $z = z_0 \neq 0$, это все-таки формальная запись, однако, верно утверждение $g(0) = a_0$.

Теорема 1.2.1. Пусть последовательности $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ поставлена в соответствие производящая функция $g(z)$. Тогда последовательности $\langle 0, 0, \dots, 0, a_m, a_{m+1}, \dots \rangle$ ставится в соответствие производящая функция

$$G(z) = g(z) - \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j.$$

Доказательство. $G(z) \triangleq a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$. Заметим, что $a_j = 0$, $j = \overline{0, m-1}$. Тогда $G(z) = 0 + \dots + 0z^{m-1} + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots$. Легко видеть, что

$$g(z) = G(z) + a_0 + a_1 z + \dots + a_{m-1} z^{m-1} = G(z) + \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.2.2. Пусть последовательностям $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ поставлены в соответствие производящие функции $g(z)$ и $h(z)$ соответственно. Тогда $G(z) = \alpha g(z) \pm \beta h(z)$ – производящая функция для последовательности $\{\alpha a_n \pm \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ – числовые множители.

Доказательство. $g(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $h(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Тогда,

$$G(z) = \alpha g(z) \pm \beta h(z) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) z^n$$

Таким образом, теорема доказана.

Сдвиг производящей функции не намного сложнее. Продемонстрируем это на следующих двух теоремах.

Теорема 1.2.3. Пусть последовательности $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ поставлена в соответствие производящая функция $g(z)$. Тогда сдвинутой на m позиций вправо последовательности $\langle 0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots \rangle$ ставится в соответствие производящая функция $G(z) = z^m g(z)$.

Доказательство. Запишем для данной последовательности производящую функцию в бесконечном виде $G(z) = 0 + 0z + \dots + 0z^{m-1} + a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + \dots = a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + \dots$. Следовательно, $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m} = z^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z^m g(z)$. Что и требовалось доказать.

Теорема 1.2.4. Пусть последовательности $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ поставлена в соответствие производящая функция $g(z)$. Тогда сдвинутой на m позиций влево последовательности $\langle a_m, a_{m+1}, \dots \rangle$ ставится в соответствие производящая функция $G(z) = \frac{1}{z^m} \left(g(z) - \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j \right)$.

Доказательство. Заметим, что производящая функция $G(z)$ представима в виде $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} z^n$. Помножив обе части этого уравнения на z^m получим $z^m G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} z^{n+m}$. Прибавим к обеим частям полученного уравнения «кусочек»

$a_0 + a_1 z + \dots + a_{m-1} z^{m-1}$. И приходим к следующему выражению:

$$z^m G(z) + a_0 + a_1 z + \dots + a_{m-1} z^{m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Легко видеть, что в правой части стоит не что иное, как $g(z)$. Тем самым, имеем

$$z^m G(z) + \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j = g(z), \quad \text{а, следовательно,}$$

$$G(z) = \frac{1}{z^m} \left(g(z) - \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j \right).$$

Теорема доказана. В предыдущем параграфе упоминалось о последовательностях частичных сумм. На практике такие последовательности встречаются часто, а поиск производящей функции для таких последовательностей иногда затруднителен, однако, определив «базисную» последовательность и воспользовавшись следующей теоремой, можно значительно упростить задачу.

Для начала поясним, что будем понимать под базисной последовательностью.

Определение 1.2.2. Если имеется последовательность частичных сумм $\langle a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots \rangle$, то будем считать базисной для этой последовательности последовательность $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$.

Теорема 1.2.5. Пусть базисной последовательности $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ поставлена в соответствие производящая функция $g(z)$. Тогда последовательности частичных сумм $\langle a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots \rangle$ ставится в соответствие

производящая функция $G(z) = \frac{g(z)}{1-z}$.

Доказательство. Для данной последовательности частичных сумм производящая функция в бесконечном виде имеет вид

$$G(z) = a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \dots$$

Сделаем для правой части следующую группировку:

$$a_0(1 + z + z^2 + \dots) + a_1z(1 + z + z^2 + \dots) + a_2z^2(1 + z + z^2 + \dots) + \dots$$

Данное выражение можно переписать в следующем виде

$$(1 + z + z^2 + \dots)(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots).$$

Выражение, стоящее в левых скобках есть формальный степенной ряд для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{1-z}$, а выражение в правых скобках уже известная производящая функция $g(z)$ для базисной последовательности. Следовательно, получили выражение для производящей функции последовательности частичных сумм: $G(z) = \frac{1}{1-z}g(z)$. Что и требовалось доказать.

Следствие. Из данной теоремы вытекают следующие две полезные формулы:

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m}^m z^n$$

$$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} C_n^m z^n$$

Замечание 1.2.2. Величина $C_n^k \triangleq \frac{n!}{(n-k)!k!}$ –

биномиальный коэффициент.

Теорема 1.2.6. (Об умножении производящих функций).

Пусть последовательностям $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ поставлены в соответствие производящие функции $g(z)$ и $h(z)$ соответственно. Тогда, $G(z) = g(z)h(z)$ – производящая функция для $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Доказательство.

$$G(z) = (a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots)(b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

Таким образом, теорема доказана.

Пример 1.2.1. Найти производящую функцию $g(z)$ для последовательности $\langle 0, 0+1, 0+1+2, 0+1+2+3, \dots \rangle$ и указать коэффициент $[z^n]g(z)$.

Решение. Заметим, что дана последовательность частичных сумм, поэтому введем для нее базисную последовательность $\langle 0, 1, 2, 3, \dots \rangle$ и поставим ей в соответствие производящую функцию $h(z)$. Тогда, согласно теореме (1.2.5), $g(z) = \frac{h(z)}{1-z}$.

Найдем $h(z)$. Если представить базисную последовательность $\langle 0, 1, 2, 3, \dots \rangle$ как $\langle 0, 1, 1+1, 1+1+1, \dots \rangle$, то легко видеть, что это тоже последовательность частичных сумм и базисной для нее будет последовательность $\langle 0, 1, 1, 1, \dots \rangle$, которой сопоставим производящую функцию, согласно теореме (1.2.3), $u(z) = zv(z)$,

где $v(z) = \frac{1}{1-z}$ – производящая функция для последовательности

$\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$. А, значит, $h(z) = \frac{u(z)}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$. Следовательно,

искомая производящая функция: $g(z) = \frac{h(z)}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^3}$.

Найдем коэффициент $[z^n]g(z)$, воспользовавшись теоремами (1.2.5) и (1.2.6).

Перепишем, для начала, полученную функцию в следующем виде

$$g(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{1-z}.$$

Обращаясь к следствию

теоремы (1.2.5), получим $\varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$. Функция

$\psi(z)$, как нам уже известно, представима в виде $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Согласно теореме (1.2.6), $c_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$, а, значит,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} n(n+1) z^n. \text{ А, следовательно, } [z^n]g(z) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Ответ: $g(z) = \frac{z}{(1-z)^3}$; $[z^n]g(z) = \frac{1}{2} n(n+1)$.

§3. Стандартные производящие функции

В процессе решения задач часто приходится работать с различными числовыми последовательностями, и всякий раз записывать их производящие функции в виде ряда не обязательно. Для большинства, так называемых, стандартных функций

используется сокращенная запись. О таких производящих функциях говорят как об аналитических функциях, т.е. о функциях, имеющих некий интервал сходимости и совпадающих с суммой своего ряда. Мы не будем вести речь о сходимости, а просто запишем такие функции:

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n ;$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} ;$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} ;$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n ;$$

$$\frac{1}{1-z^m} = 1 + z^m + z^{2m} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{mn} ;$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} ;$$

$$(1+z)^\sigma = 1 + \frac{\sigma}{1!} z + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2!} z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n ,$$

где $\binom{\sigma}{n} \triangleq \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-\sigma+1)}{\sigma!}$.

Утверждение 1.3.1. Если последовательности $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ отвечает производящая функция $g(z)$, то

a) $G(z) = \frac{g(z) + g(-z)}{2}$ – производящая функция для $\langle a_0, 0, a_2, 0, a_4, \dots \rangle$;

б) $G(z) = \frac{g(z) - g(-z)}{2}$ – производящая функция для $\langle 0, a_1, 0, a_3, 0, \dots \rangle$.

Действительно, если положить $g(z) = \frac{1}{1-z}$, то, исходя из

пункта а) данного утверждения, функция $G(z) = \frac{1}{1-z^2}$ генерирует последовательность $\langle 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$, согласно соотношению $\frac{1}{1-z^m} = 1 + z^m + z^{2m} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{mn}$.

§4. Формальное дифференцирование

Определение 1.4.1. Пусть $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ – по определению производящая функция последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, а функция $g'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots$ – ее производная.

Замечание 1.4.1. Согласно сформулированному определению, $g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$.

Теорема 1.4.1. Пусть последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ поставлена в соответствие производящая функция $g(z)$. Тогда последовательности $\{n a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ставится в соответствие производящая функция $G(z) \doteq z g'(z)$.

Доказательство. Запишем $G(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} z a_n \frac{d}{dz} z^n$. В силу того, что рассматриваемый ряд формальный, то оператор дифференцирования можно вынести за знак суммы, тогда получим $G(z) = z \frac{d}{dz} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}_{g(z)} = z \frac{d}{dz} g(z)$.

Что и требовалось доказать.

Для дифференцирования сложной функции верно следующее определение.

Определение 1.4.2. Пусть $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ и $h(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ – производящие функции последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно. Тогда, $g'(h(z)) = g'(h(z)) h'(z)$.

Для проверки этого равенства, достаточно рассмотреть моном $g(z) = z^k$. Т.е. выражение $g'(h(z)) = g'(h(z)) h'(z)$

сводится к равенству $(h^k(z))' = k h^{k-1}(z) h'(z)$. Это равенство выполнимо для любой производящей функции $h(z)$. В частности, это легко проверить, когда $h(z)$ – многочлен.

§5. Формальное интегрирование

Определение 1.5.1. Пусть $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ – производящая функция последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, а функция $\int g(z) = a_0 z + \frac{1}{2} a_1 z^2 + \frac{1}{3} a_2 z^3 + \dots$ – ее интеграл.

Замечание 1.5.1. Согласно сформулированному определению, $\int_0^z g(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} z^n$.

Заметим, что нулевой член новой последовательности равен нулю.

Если же вместо $\left\{ \frac{a_{n-1}}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ нужна производящая функция для $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$, то необходимо выполнить сдвиг влево на одну позицию. Таким образом, согласно теореме (1.2.4), подынтегральная функция примет вид $\frac{g(\xi) - a_0}{\xi}$. А, значит,

$$\int_0^z \frac{g(\xi) - a_0}{\xi} d\xi = a_1 z + \frac{1}{2} a_2 z^2 + \frac{1}{3} a_3 z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n z^n.$$

Действительно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^z \xi^{n-1} d\xi \right)$. В силу того, что рассматриваемый ряд формальный, то оператор интегрирования можно вынести за знак суммы, тогда получим

$$\int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^{n-1} d\xi = \int_0^z \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^{n-1}}_{g(\xi) - a_0} \frac{1}{\xi} d\xi = \int_0^z \frac{g(\xi) - a_0}{\xi} d\xi.$$

Операция дифференцирования обратна операции интегрирования: $\left(\int_0^z g(\xi) d\xi \right)' = g(z)$.

Однако интегрирование производной приводит к функции с нулевым свободным членом, и поэтому результат отличается от исходной функции: $\int_0^z g'(\xi) d\xi = g(z) - g(0)$.

Глава 2. Рекуррентные соотношения

§1. Основные сведения

Для рекуррентного соотношения, которому удовлетворяет некоторая числовая последовательность $\{a_n\}$, нам интересно представление a_n через n в замкнутом виде. Производящие функции позволяют это сделать за несколько шагов, которые выполняются достаточно механически и их даже можно запрограммировать:

1. Записываем уравнение, выражающее a_n через другие элементы последовательности. Это уравнение должно быть справедливо для всех натуральных n .
2. Умножаем обе части уравнения на z^n и суммируем по всем n . В левой части уравнения будет производящая функция $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Правую часть преобразовываем так, чтобы она превратилась в некое выражение, содержащее $g(z)$.
3. Решаем полученное уравнение, получив для $g(z)$ выражение в замкнутом виде.
4. Раскладываем $g(z)$ в степенной ряд и выражаем коэффициент при z^n . Это и будет замкнутый вид для a_n .

Причина работоспособности такого метода в том, что функция $g(z)$ представляет всю последовательность $\{a_n\}$ и это представление позволяет делать многие преобразования.

Определение 2.1.1. Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ задана линейным однородным рекуррентным соотношением порядка k , если имеет место следующее выражение:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n.$$

Здесь $c_1, c_2, \dots, c_k$ – постоянные коэффициенты (отличные от нуля), а $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ – известны.

Докажем теорему о производящей функции для произвольной последовательности, заданной линейным рекуррентным соотношением.

Теорема 2.1.1. Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана линейным однородным рекуррентным соотношением порядка k согласно определению (2.1.1). Тогда производящая функция $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ рациональна, т.е. $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,

причем $\deg Q = k$ и $\deg P \leq k-1$.

Доказательство. Умножим рекуррентное соотношение $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n$ на z^{n+k} и просуммируем по всем $n \geq 0$. Получим равенство

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+k} z^{n+k} = c_1 z \sum_{n \geq 0} a_{n+k-1} z^{n+k-1} + \\ + c_2 z^2 \sum_{n \geq 0} a_{n+k-2} z^{n+k-2} + \dots + c_k z^k \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_n z^n}_{g(z)}.$$

Пользуясь уже ранее доказанной теоремой (1.2.1), приходим к следующему выражению

$$g(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j = c_1 z \left(g(z) - \sum_{j=0}^{k-2} a_j z^j \right) + \dots + c_k z^k g(z).$$

А, следовательно, $g(z)(1 - c_1 z - c_2 z^2 - \dots - c_k z^k) = P(z)$. Где $P(z)$ – некоторый полином, степени не больше $k-1$. Отсюда получаем утверждение настоящей теоремы.

Замечание 2.1.1. Заметим, что в процессе доказательства теоремы было установлено, что многочлен $Q(z)$ имеет вид

$$Q(z) = 1 - c_1 z - c_2 z^2 - \dots - c_k z^k.$$

Определение 2.1.2. Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ задана линейным неоднородным рекуррентным соотношением порядка k , если имеет место выражение:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + h_m(n).$$

Здесь $h_m(n)$ – некоторый многочлен.

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2.1.2. Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана линейным неоднородным рекуррентным соотношением порядка k согласно определению (2.1.2). Тогда последовательность $\{a_n\}$ задается через однородное рекуррентное соотношение порядка $k+m+1$ с постоянными коэффициентами и, как следствие, производящая функция $g(z)$ для нее рациональна.

§2. Последовательность Фибоначчи

Числовая последовательность Фибоначчи $\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \rangle$ задается рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n \geq 0. \end{cases}$$

Удивительным способом числа Фибоначчи получаются по формуле Бине

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

где $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\alpha}$. Удивительно то, что, несмотря на присутствие иррациональных чисел, формула дает целые числа.

Для вывода формулы Бине воспользуемся методом производящих функций.

Итак, обе части уравнения $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ умножим на z^{n+2} и просуммируем по всем $n \geq 0$:

$$\sum_{n \geq 0} F_{n+2} z^{n+2} = z \sum_{n \geq 0} F_{n+1} z^{n+1} + z^2 \sum_{n \geq 0} F_n z^n.$$

Обозначим через $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \dots$

производящую функцию последовательности Фибоначчи. Тогда, согласно теореме (1.2.1) и учитывая начальные данные, вслед за соотношением $\sum_{n \geq 0} F_{n+2} z^{n+2} = z \sum_{n \geq 0} F_{n+1} z^{n+1} + z^2 \sum_{n \geq 0} F_n z^n$ имеет

$$\text{место производящая функция } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Зная производящую функцию последовательности $\{F_n\}$, можно получить зависимость $F(n)$. Сначала рассмотрим знаменатель

производящей функции $g(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$, т.е.

$$1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z). \text{ Здесь } \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} = \frac{2}{1 \pm \sqrt{5}} - \text{ корни}$$

уравнения $1 - z - z^2 = 0$. Отсюда, получаем выражение

$$g(z) = \frac{A_1}{1 - \alpha z} + \frac{A_2}{1 - \beta z}, \text{ где } A_1, A_2 \text{ имеют вид } A_1 = \frac{1}{\alpha - \beta},$$

$$A_2 = -\frac{1}{\alpha - \beta}. \text{ Значит, разложение в степенной ряд функции}$$

$$g(z) \text{ будет следующее } g(z) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n z^n \right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} z^n. \text{ Следовательно, } F_n = [z^n]g(z) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

$$\text{Подставим } \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ и } \alpha - \beta = \sqrt{5} \text{ в } F_n \text{ и получим}$$

формулу Бине. На этом вывод формулы Бине закончен.

Глава 3. Решение задач

§1. Комбинаторика

Задача №1. Монету бросают 10 раз. Каково число комбинаций исходов, при котором выигрыш игрока составит 4 единицы?

Решение. Запишем производящую функцию суммы исходов 10 опытов в следующем виде

$$g(z) = (z^{-1} + z)^{10} = \frac{1}{z^{10}} (1 + z^2)^{10} = \frac{1}{z^{10}} \sum_{j=0}^{10} C_{10}^j z^{2j} = \sum_{j=0}^{10} C_{10}^j z^{2j-10}.$$

Коэффициент при z^4 такой, что $2j - 10 = 4 \Rightarrow j = 7$. Значит, $[z^4]g(z) = C_{10}^7 = 120$. Т.е. в 120 комбинациях из $2^{10} = 1024$ выигрыш игрока достигнет четырех единиц.

Задача №2. Сколько существует слов длины n , состоящих из букв алфавита $\{a, b, c\}$, при условии, что aa не встречается ни в одном слове?

Решение. Запишем рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} \omega_0 = 1 & (\emptyset) \\ \omega_1 = 3 & (a, b, c) \\ \omega_n = 2\omega_{n-1} + 2\omega_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Тогда, получаем $\sum_{n \geq 0} \omega_{n+2} z^{n+2} = 2z \sum_{n \geq 0} \omega_{n+1} z^{n+1} + 2z^2 \sum_{n \geq 0} \omega_n z^n$.

Следовательно, $g(z) - 1 - 3z = 2z(g(z) - 1) + 2z^2 g(z)$, т.е.

$$g(z) = \frac{z + 1}{1 - 2z - 2z^2}.$$

Процесс поиска $[z^n]g(z)$ в точности совпадает с процессом вывода формулы Бине для чисел Фибоначчи. Поэтому, опустим детали и запишем, что

$$\omega_n = \frac{(2 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}.$$

§2. Рекуррентные соотношения

Задача №3. Найти формулу для a_n в замкнутом виде.

$$\begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 9, \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Решение. Будем продолжать действовать согласно алгоритму, предложенному в параграфе 1 предыдущей главы.

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+2} z^{n+2} = 6z \sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^{n+1} - 9z^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Тогда,

$$g(z) = \frac{3z + 1}{(3z - 1)^2} = \frac{1}{3z - 1} + \frac{2}{(3z - 1)^2} = -\frac{1}{1 - 3z} + 2 \frac{1}{(1 - 3z)^2}.$$

$\frac{1}{1 - 3z} = \sum_{n \geq 0} 3^n z^n$, а $\frac{1}{(1 - 3z)^2}$ раскладывается в ряд по формуле

$$\frac{1}{(1 - z)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m}^m z^n, \text{ т.е. } \frac{1}{(1 - 3z)^2} = \sum_{n \geq 0} C_{n+1}^1 (3z)^n = \sum_{n \geq 0} 3^n (n + 1) z^n.$$

Таким образом, $g(z) = -\sum_{n \geq 0} 3^n z^n + 2 \sum_{n \geq 0} 3^n (n + 1) z^n =$

$$= \sum_{n \geq 0} 3^n (2n + 1) z^n. \text{ А, значит, } a_n = [z^n]g(z) = 3^n (2n + 1).$$

Задача №4. Найти производящую функцию $g(z)$ для последовательности, заданной линейным неоднородным рекуррентным соотношением и указать $[z^n]g(z)$.

$$\begin{cases} \gamma_0 = \gamma_1 = 1, \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + 2\gamma_{n-2} + (-1)^n, & n \geq 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\sum_{n \geq 0} \gamma_{n+2} z^{n+2} = z \sum_{n \geq 0} \gamma_{n+1} z^{n+1} + 2z^2 \underbrace{\sum_{n \geq 0} \gamma_n z^n}_{g(z)} + z^2 \underbrace{\sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n}_{\frac{1}{1+z}}.$$

Следовательно, $g(z) - 1 - z = z(g(z) - 1) + 2z^2 g(z) + \frac{z^2}{1 + z}$.

Значит, $g(z) = \frac{1 + z + z^2}{(1 + z)(1 - z - 2z^2)}$. Отсюда,

$$[z^n]g(z) = \frac{7}{9} 2^n + \left(\frac{1}{3} n + \frac{2}{9}\right) (-1)^n.$$

Задача №5. Доказать тождество для чисел Фибоначчи
 $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

Решение. Обратимся к матричному представлению чисел Фибоначчи:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix}. \text{ Тогда } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Теперь, рассмотрим

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \right)^2 = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}^2 = \\ & = \begin{pmatrix} F_{n-1}^2 + F_n^2 & F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) \\ F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) & F_{n+1}^2 + F_n^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & \boxed{F_{2n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1}^2 + F_n^2 & F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) \\ F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) & \boxed{F_{n+1}^2 + F_n^2} \end{pmatrix}.$$

Задача №6. Найти сумму первых n чисел Фибоначчи.

Решение. Пусть F_k – k -е число Фибоначчи, тогда $F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n$ – сумма первых n таких чисел. Это есть свертка двух последовательностей $\{F_n\}$ и $\{1\}$. Т.е. искомая производящая функция – это произведение производящих функций для чисел Фибоначчи и для одних единиц:

$$g(z) = \frac{z}{1-z-z^2} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{A_1}{1-\alpha z} + \frac{A_2}{1-\beta z} + \frac{A_3}{1-z}, \quad \text{где}$$

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} = \frac{2}{1 \pm \sqrt{5}} - \text{корни уравнения } 1 - z - z^2 = 0.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, получаем

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^2}{1 - \alpha z} - \frac{\beta^2}{1 - \beta z} \right) - \frac{1}{1 - z} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - 1 \right) z^n, \quad \text{где} \quad \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = F_{n+2}. \quad \text{А,} \end{aligned}$$

следовательно, сумма первых n чисел Фибоначчи выражается через величину $F_{n+2} - 1$. Таким образом, задача решена.